Zadanie 1. Dwaj rowerzyści wyruszyli w tę samą trasę: pierwszy o 10.00, drugi o godzinę później. O godzinie 14.00 drugi rowerzysta dogonił pierwszego. Oblicz prędkości obu rowerzystów, jeśli drugi jechał ze średnią prędkością o 5 km/h większą niż drugi. Niech v oznacza prędkość wolniejszego rowerzysty w metrach na sekundę. Zakoduj cyfrę jedności dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby v.

Rozwiązanie

	Droga $[km]$	Prędkość $\left[\frac{km}{h}\right]$	Czas $[h]$
I rowerzysta	$4V$	V	4 (od 10:00 do 14:00)
II rowerzysta	$3(V+5)$	V+5	3 (od 11:00 do 14:00)

$4V = 3(V+5)$

$4V = 3V + 15$

$V = 15$

$$V = 15\left[\frac{km}{h}\right] = \frac{15\ km}{1\ h} = \frac{15\ 000\ m}{3600\ s} = \frac{150}{36}\left[\frac{m}{s}\right] = \frac{25}{6}\left[\frac{m}{s}\right] = 4\frac{1}{6}\left[\frac{m}{s}\right] = 4{,}166\ldots\left[\frac{m}{s}\right]$$

$v = 4{,}166\ldots$

Odpowiedź: | 4 | 1 | 6 |

Zadanie 2. Wyznacz liczby x i y spełniające układ równań:

$$\begin{cases} y - x(2x+1) = -2(x-1)^2 + 3 \\ (y+1)^2 + 2x = y(y+1) + 5 \end{cases}$$

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego iloczynu xy.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} y - x(2x+1) = -2(x-1)^2 + 3 \\ (y+1)^2 + 2x = y(y+1) + 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x^2 - x + y = -2x^2 + 4x + 1 \\ 2x + y^2 + 2y + 1 = y^2 + y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x + y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -7x = -3 \\ y = 4 - 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{22}{7} \end{cases}$$

$$xy = \frac{66}{49} = 1.346\ldots$$

Odpowiedź: | 1 | 3 | 4 |

Zadanie 3. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego sumy liczb x i y, które tworzą parę będącą rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} x\sqrt{2} + y = 4\sqrt{2} \\ x - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$\begin{cases} x\sqrt{2} + y = 4\sqrt{2} \\ x - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y\sqrt{2} = 8 \\ x - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x + y = \frac{10 + 2\sqrt{2}}{3} = 4.276\ldots$$

Odpowiedź:

4	2	7

Zadanie 4. Michał uczestniczył w dwudniowym zgrupowaniu zawodników klubu kajakarskiego. Pierwszego dnia płynął kajakiem 3 godziny z prądem rzeki oraz tyle samo czasu pod prąd i pokonał łącznie 24 km. Drugiego dnia płynął kajakiem 2 godziny z prądem rzeki i 4 godziny pod prąd, pokonując łącznie 21 km. Oblicz prędkość prądu rzeki.

Rozwiązanie

x- prędkość kajaka y – prędkość prądu rzeki w km/h

$$\begin{cases} 3(x + y) + 3(x - y) = 24 \\ 2(x + y) + 4(x - y) = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = 24 \\ 6x - 2y = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1{,}5 \end{cases}$$

Odpowiedz: Prędkość prądu rzeki była równa 1,5 km/h.

Zadanie 5. Uzasadnij, że punkt $P(x,y)$, którego współrzędne spełniają podany układ równań, należy do prostokąta o wierzchołkach $A(1,1), B(3,1), C(3,6), D(1,6)$.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-x)(y+x)=y(y-1)\\ x+y-\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{x+2y}{2}+2\end{cases}$$

Rozwiązanie

$$\begin{cases}-4x+y=-4\\ 2x+2y-x+y=x+2y+4\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4x+y=-4\\ y=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$$

$ABCD=\{(x,y): 1\le x\le 3 \text{ i } 1\le y\le 6\}$

Para liczb $\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$ spełnia warunki $1\le x\le 3$ i $1\le y\le 6$ więc punkt $P(2,4)$ należy do prostokąta ABCD.

Zadanie 6. Wykaż, że $m=-5$ jest największą liczba całkowitą, dla której układ równań

$$\begin{cases}2x-y=2m+1\\ 3x-2y=2m-3\end{cases}$$

jest spełniony przez parę liczb ujemnych.

Rozwiązanie

$$\begin{cases}2x-y=2m+1\\ 3x-2y=2m-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x-2y=4m+2\\ -3x+2y=-2m+3\end{cases}$$

$x=2m+5$

$$\begin{cases}2m+5<0\\ 2m+9<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-y=2m+1\\ 3x-2y=2m-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}6x-3y=6m+3\\ -6x+4y=-4m+6\end{cases}$$

$y=2m+9$

$$\begin{cases}m<-2{,}5\\ m<-4{,}5\end{cases}$$

$m<-4{,}5$

Największą liczbą całkowitą mniejszą od -4,5 jest -5 , co należało udowodnić.